



ce
pre
UNI

**CICLO
PRE 2024 - I**

Trigonometría

✓ **TRANSFORMACIÓN DE COORDENADAS**



TRANSFORMACIÓN DE COORDENADAS

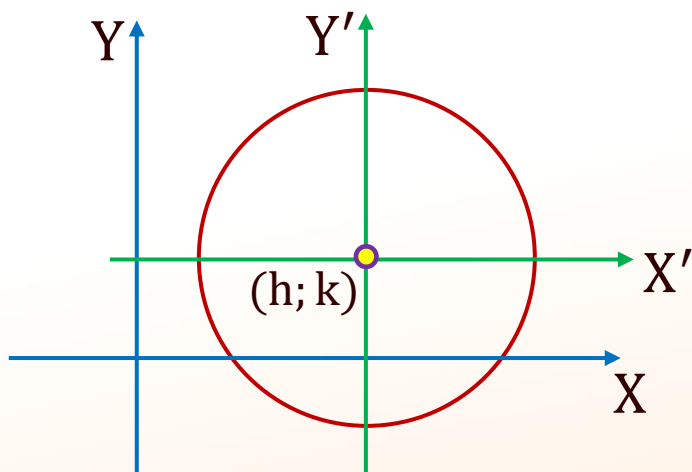
Una transformación de coordenadas es un cambio de posición de los ejes coordenados que facilita el estudio de una ecuación en un nuevo sistema de coordenadas, donde se conservan **las propiedades geométricas** de la gráfica de dicha ecuación.

Con estas transformaciones se obtienen ecuaciones más sencillas que simplifican la identificación del lugar geométrico.

Las transformaciones que estudiaremos son: **Traslación y Rotación de ejes.**

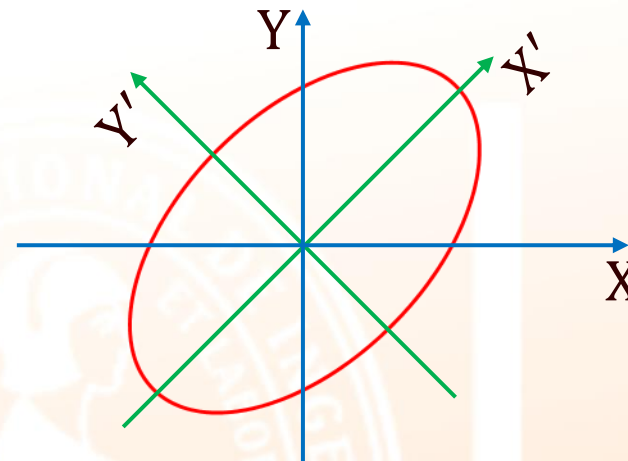
Ejemplos:

- $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$



$$(x')^2 + (y')^2 = r^2$$

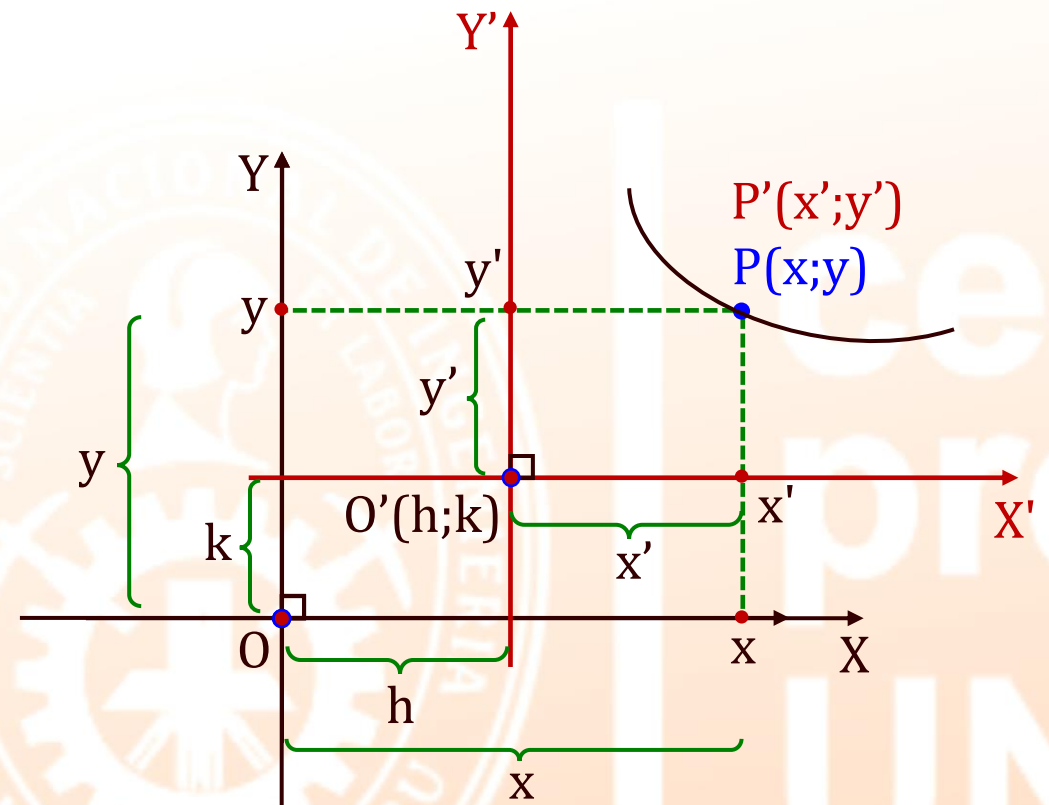
- $x^2 - xy + y^2 = 4$



$$\frac{(x')^2}{8} + \frac{3(y')^2}{8} = 1$$

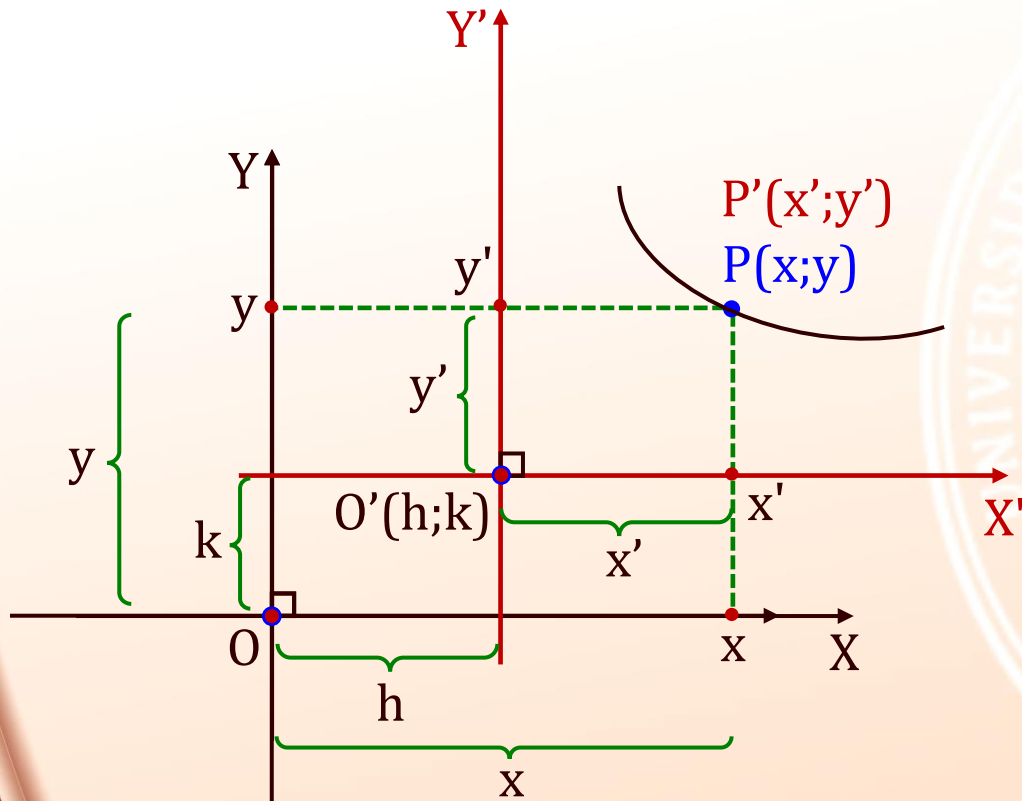
1. TRASLACIÓN DE EJES

Dado el sistema de coordenadas XY de un plano, un nuevo sistema de coordenadas $X'Y'$ del mismo plano, es la **traslación de ejes** del sistema inicial, si el origen O' del nuevo sistema es un punto distinto del origen O del sistema inicial y los nuevos ejes coordenados son paralelos a los del sistema inicial, es decir, el eje X' es paralelo al eje X y el eje Y' es paralelo al eje Y .



1. TRASLACIÓN DE EJES

Dado el sistema de coordenadas XY de un plano, un nuevo sistema de coordenadas $X'Y'$ del mismo plano, es la **traslación de ejes** del sistema inicial, si el origen O' del nuevo sistema es un punto distinto del origen O del sistema inicial y los nuevos ejes coordenados son paralelos a los del sistema inicial, es decir, el eje X' es paralelo al eje X y el eje Y' es paralelo al eje Y .



Del gráfico adjunto notamos que:

$$\begin{aligned} x &= x' + h \\ y &= y' + k \end{aligned}$$

que al despejar se obtiene:

$$\begin{aligned} x' &= x - h \\ y' &= y - k \end{aligned}$$

PROBLEMA 01

Al trasladar el origen al punto $O'(-2;-6)$, las coordenadas $(a; b)$ se transforman en $(2a - 1; 3b + 2)$. Calcule el valor de $a.b$

A) 3
D) 9

B) 6
E) 12

C) 8

CLAVE: B

PROBLEMA 02

Al trasladar el origen de coordenadas al punto $(3, -2)$ la ecuación $2x + 5y + 13 = 0$, se transforma en $2x' + 5y' + n = 0$. Calcule el valor de n .

A) 6
D) 9

B) 7
E) 10

C) 8

CLAVE: D

PROBLEMA 03

Dada la ecuación:

$$x^2y + 2x^2 + y = 2xy + 4x$$

que al trasladar el origen al punto $O'(h; k)$, se transforma en $(x')^2(y') = m$.

Calcule el valor de $2h + 3k + 4m$.

- | | | |
|------|-------|------|
| A) 3 | B) 4 | C) 8 |
| D) 9 | E) 12 | |

CLAVE: B

PROBLEMA 04

Al trasladar el origen de coordenadas al punto $(h; k)$ la ecuación

$x^2 + xy + y^2 - 7x - 8y + 18 = 0$, se transforma en otra que carece de términos de primer grado. Calcule el valor de $5h - 2k$.

- | | | |
|------|------|------|
| A) 1 | B) 2 | C) 3 |
| D) 4 | E) 5 | |

CLAVE: D

PROBLEMA 05

Mediante una traslación de ejes, reduzca la ecuación $x^3 - 3x^2 + 3x - y^2 + 4y - 6 = 0$, a su forma más simple.

A) $(x')^3 + (y')^2 = 1$

B) $(x')^3 - (y')^2 = 1$

C) $(x')^3 - 2(y')^2 = 1$

D) $(x')^3 + 2(y')^2 = 1$

E) $(x')^3 - (y')^2 = 2$

CLAVE: B

PROBLEMA 06

Dado el triángulo ABC, tal que $A(8; 6)$, $B(a; b)$ y $C(-7; -3)$. Cuando el origen de coordenadas es trasladado al punto $Q(-a; b)$ en el primer cuadrante, el baricentro en el nuevo sistema es $(-5; -1)$. Calcule el valor de $a + b$.

A) 5

B) 10

C) -1

D) 1

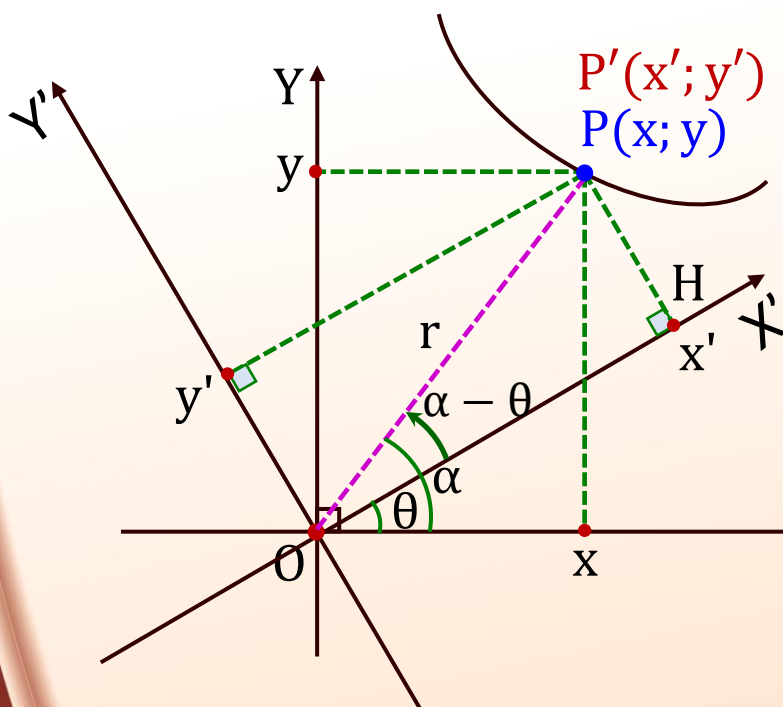
E) -2

CLAVE: C

2. ROTACIÓN DE EJES

Dado un sistema de coordenadas XY de un plano, un nuevo sistema de coordenadas $X'Y'$ del mismo plano es la **rotación de ejes** del sistema inicial, si el origen del nuevo sistema O' coincide con el del sistema inicial y los nuevos ejes coordenados han sido rotados un ángulo de medida θ tal que $0^\circ < \theta < 180^\circ$, es decir, el eje X' con el eje X y el eje Y' con el eje Y forman un ángulo de medida θ .

Gráficamente:



En el sistema XY , por definición de R.T. de un ángulo en posición normal: $x = r \cos(\alpha) \wedge y = r \sin(\alpha)$

En el sistema $X'Y'$, por definición de R.T. de un ángulo en posición normal: $x' = r \cos(\alpha - \theta) \wedge y' = r \sin(\alpha - \theta)$

Desarrollamos: $x' = r \cos(\alpha) \cos(\theta) + r \sin(\alpha) \sin(\theta)$
 $y' = r \sin(\alpha) \cos(\theta) - r \cos(\alpha) \sin(\theta)$

Entonces:

$$\begin{aligned} x' &= x \cos(\theta) + y \sin(\theta) \\ y' &= -x \sin(\theta) + y \cos(\theta) \end{aligned}$$

Despejando,

$$\begin{aligned} x &= x' \cos(\theta) - y' \sin(\theta) \\ y &= x' \sin(\theta) + y' \cos(\theta) \end{aligned}$$

PROBLEMA 07 (EX. ADMISIÓN 2018 – II)

Dado el punto $P = (-2; \sqrt{3})$, determine las nuevas coordenadas de dicho punto luego que los ejes coordenados giran un ángulo de medida 30° en sentido antihorario.

- A) $(-\sqrt{3}; 1/2)$ B) $(-\sqrt{3}; 7/2)$
 C) $(-\sqrt{3}/4; 1/2)$ D) $(-2\sqrt{3}; 5/2)$
 E) $(-\sqrt{3}/2; 5/2)$

CLAVE: E

PROBLEMA 08

Dada la ecuación $5x - 2y - 1 = 0$, al rotar los ejes cartesianos un ángulo de medida θ tal que $\tan(\theta) = 3/4$, dicha ecuación se transforma en

- A) $14x' - 17y' - 5 = 0$
 B) $14x' - 23y' - 5 = 0$
 C) $9x' - 14y' - 10 = 0$
 D) $9x' - 23y' - 5 = 0$
 E) $13x' - 17y' - 10 = 0$

CLAVE: B

PROBLEMA 09 (EX. FINAL 2010 – II)

Dada la ecuación $y^2 = x^2 + 2$, si los ejes rotan (en sentido antihorario) un ángulo de medida 45° , determine la ecuación transformada.

- A) $6x'y' - 1 = 0$
- B) $4x'y' - 1 = 0$
- C) $2x'y' - 1 = 0$
- D) $x'y' - 1 = 0$
- E) $x'y' - 2 = 0$

CLAVE: D

PROBLEMA 10

Por una rotación de los ejes coordenados en un ángulo de medida 30° , una ecuación se transforma en $(x')^2 + 2(y')^2 = 3$. Determine dicha ecuación.

- A) $5x^2 + 3y^2 - \sqrt{3}xy = 1$
- B) $5x^2 - 3y^2 - 2\sqrt{3}xy = 3$
- C) $5x^2 + 3y^2 - 2\sqrt{3}xy = 8$
- D) $5x^2 + 7y^2 - 2\sqrt{3}xy = 12$
- E) $5x^2 + 3y^2 - 2\sqrt{3}xy = 10$

CLAVE: D

PROBLEMA 11 (PC 6 – CEPREUNI 2010 – I)

Sea el punto $P = (1; \tan(\theta))$ en el sistema XY . Luego de girar los ejes un ángulo de medida θ ($0^\circ < \theta < 90^\circ$), determine las nuevas coordenadas del punto P en el sistema $X'Y'$.

- | | |
|------------------------|------------------------|
| A) $(1; 0)$ | B) $(\sec(\theta); 0)$ |
| C) $(\csc(\theta); 0)$ | D) $(\sec(\theta); 1)$ |
| E) $(\csc(\theta); 1)$ | |

CLAVE: B

PROBLEMA 12

Mediante una rotación de ejes, transforme la ecuación:

$$17x^2 + 32xy - 7y^2 = 75$$

en otra ecuación que carezca del término $x'y'$.

- | |
|-----------------------------|
| A) $3(x')^2 - 5(y')^2 = 30$ |
| B) $5(x')^2 - 3(y')^2 = 30$ |
| C) $3(x')^2 - 5(y')^2 = 15$ |
| D) $5(x')^2 - 3(y')^2 = 15$ |
| E) $3(x')^2 - 5(y')^2 = 60$ |

CLAVE: D

PROBLEMA 13

Mediante una rotación de ejes, la ecuación $x^2 - xy + y^2 = 4$, se transforma en:

$$\frac{(x')^2}{A} - \frac{(y')^2}{B} = 1$$

Calcule el valor de $A + B$

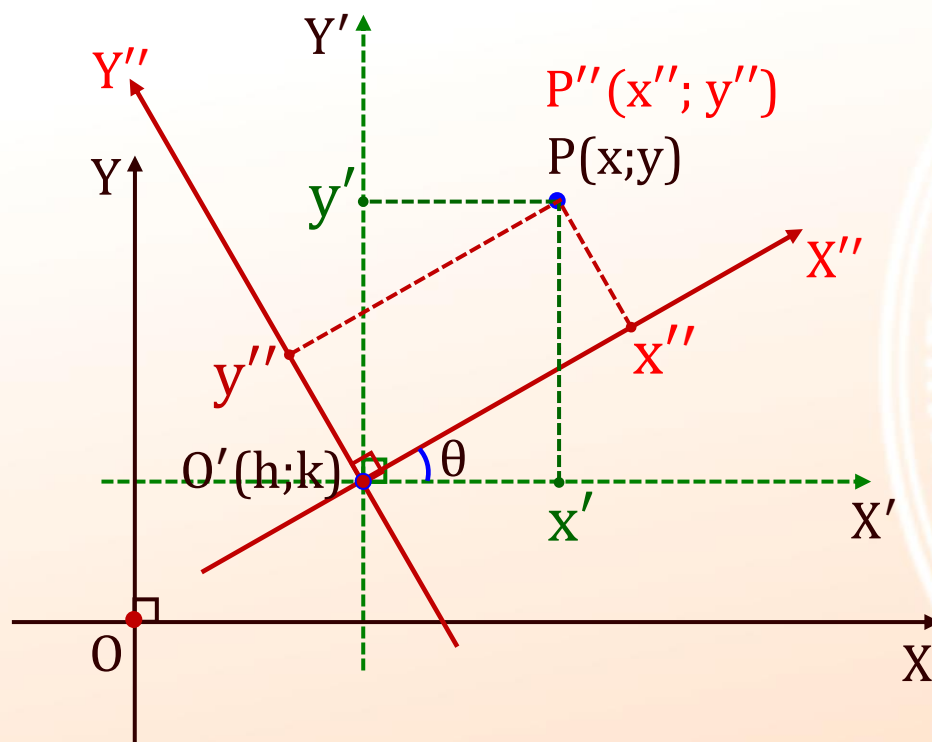
- A) $3/8$ B) $16/3$ C) 2
D) 8 E) $1/2$

CLAVE: B

3. TRASLACIÓN Y ROTACIÓN DE EJES

Dado un sistema de coordenadas XY de un plano, un nuevo sistema de coordenadas $X''Y''$, del mismo plano, es generado por la **traslación y rotación de ejes** del sistema inicial.

Gráficamente:



De XY a $X'Y'$:

$$\begin{aligned} \text{➤ } x &= x' + h & \text{➤ } y &= y' + k \end{aligned}$$

De $X'Y'$ a $X''Y''$:

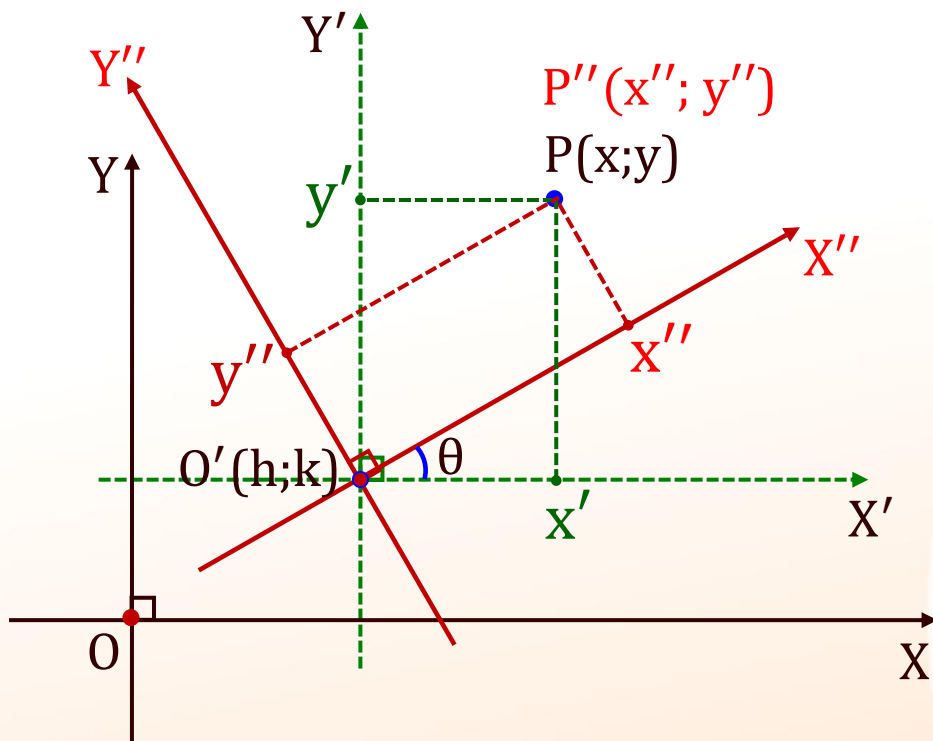
$$\checkmark \quad x' = x'' \cos(\theta) - y'' \sin(\theta)$$

$$\checkmark \quad y' = x'' \sin(\theta) + y'' \cos(\theta)$$

$$x = x'' \cos(\theta) - y'' \sin(\theta) + h$$

$$y = x'' \sin(\theta) + y'' \cos(\theta) + k$$

Además:



De XY a $X'Y'$:

- $x' = x - h$
- $y' = y - k$

De $X'Y'$ a $X''Y''$:

- ❖ $x'' = x' \cos(\theta) + y' \sin(\theta)$
- ❖ $y'' = -x' \sin(\theta) + y' \cos(\theta)$

$$x'' = (x - h) \cos(\theta) + (y - k) \sin(\theta)$$

$$y'' = -(x - h) \sin(\theta) + (y - k) \cos(\theta)$$

PROBLEMA 14 (PC 6 – CEPREUNI 2010 – I)

Mediante una transformación de coordenadas, la ecuación de la cónica $xy - 4x - 2y = 0$ se transforma, en el nuevo sistema $X''Y''$, en:

- A) $(x'')^2 + (y'')^2 = 16$
- B) $(x'')^2 - (y'')^2 = 16$
- C) $(x'')^2 + (y'')^2 = 4$
- D) $(x'')^2 - (y'')^2 = 4$
- E) $(x'')^2 - (y'')^2 = 2$

CLAVE: B

PROBLEMA 15

El origen de coordenadas se traslada al punto $(3; 2)$ y luego se hace una rotación de ejes en un ángulo de medida 45° . Determine en este nuevo sistema las coordenadas finales del punto $P(10; 5)$.

- A) $(2\sqrt{2}; 3\sqrt{2})$
- B) $(3\sqrt{2}; 5\sqrt{2})$
- C) $(5\sqrt{2}; 3\sqrt{2})$
- D) $(5\sqrt{2}; -2\sqrt{2})$
- E) $(-2\sqrt{2}; 3\sqrt{2})$

CLAVE: D

PROBLEMA 16 (PC 6 – CEPREUNI 2010 – II)

Mediante una traslación de los ejes coordenados al nuevo origen $O'(1;1)$, y luego una rotación de los ejes coordenados en un ángulo de medida 45° , una ecuación se transformó en $(x'')^2 - 2(y'')^2 = 2$. Determine la ecuación original en el sistema XY .

- A) $x^2 + 6xy + y^2 + 4x + 4y = 0$
- B) $x^2 - 6xy + y^2 - 4x + 4y = 0$
- C) $x^2 - 6xy + y^2 + 4x + 4y = 0$
- D) $x^2 - 6xy + y^2 = 0$
- E) $x^2 + 6xy + y^2 = 0$

CLAVE: C

PROBLEMA 17 (PC 6 – CEPREUNI 2011 – II)

La recta $L: x - y - 3 = 0$ se transforma en $y'' = h$, luego que los ejes coordenados se trasladan al punto $(h; -12)$ y rotan un ángulo de medida θ . Calcule el valor positivo de h .

- A) $9(\sqrt{2} - 1)$
- B) $9(\sqrt{2} + 1)$
- C) 6
- D) 9
- E) 12

CLAVE: B

PROBLEMA 18

Se tiene la recta $L: y = 0$, en el sistema coordenado XY . Si el origen de coordenadas es trasladado al punto $(2; -2)$ y luego los ejes se rotan en sentido horario un ángulo de medida 30° , se obtiene el nuevo sistema coordenado $X''Y''$. Determine la ecuación de la recta L en este nuevo sistema coordenado.

- A) $x'' + 2y'' = \sqrt{3}$
- B) $x'' - \sqrt{3}y'' = 2$
- C) $x'' + \sqrt{3}y'' = 4$
- D) $\sqrt{3}x'' + y'' = 2$
- E) $\sqrt{3}x'' + 2y'' = 1$

CLAVE: C